La division euclidienne

Par Dimitri PIANETA

La division est l'opération inverse de la multiplication : dans un anneau A, effectuer, lorsque cela est possible, la division de a par b, c'est trouver $q \in A$ tel que a=bq. L'élément q s'appelle un quotient de a par b. Si l'anneau A est intègre, le quotient (lorsqu'il existe) est unique et se note a/b ou a :b ou $a \div b$.

Dans un premier temps posons, un petit problème suivant :

Pour fêter l'anniversaire, Stéphanie souhaite partager équitablement toute une boîte contenant 75 chocolats avec 6 de ses amis.

Combien vont-ils recevoir chacun ? Combien va-t-il lui en rester ?

La division euclidienne permet de résoudre ce problème car il s'agit ici de distribuer les chocolats sans les couper, même s'il en reste.

Dans ce problème, on pose la division 75 par 6.

On applique la division euclidienne qui a comme méthode suivante :

(1) Ecriture de la division

Dividende (D)

Division (d)

75	6

On note le vocabulaire suivant :

Le dividende : c'est le nombre qui est divisé par un autre (ici le nombre de chocolats).

Le diviseur : c'est le nombre qui divise (ici nombre d'amis)

(2) On sélectionne un nombre ou un chiffre du dividende (D) qui doit être supérieur à la division (d). Donc D>d.

Dans 7 combien de fois 6 ; 1 fois. Je marque 1 dans le quotient.

75	6
	1

Quotient (q)

Vocabulaire :

Le **quotient** : cela signifie le « nombre de lois » ici c'est le nombre de lois que l'on peut mettre le diviseur dans la dividende (ici nombre de chocolats par ami).

(3)

7 moins 6 est égal à 1. J'abaisse 5.

75	6
- 6	1
15	

(4) Dans 15 combien de fois 6 : 2 fois. Je marque 2 dans le quotient.

75	6
- 6	12
15	

(5) 15 moins 12 est égal à 3.

75	6	
- 6	12	
15		
- 12		Reste(r)
03		

Donc dans 75, il y a 12 fois 6 et il reste 3. Le quotient est 12 et le reste est 3.

Nous pouvons vérifier une propriété de vérification de notre calcul :

Dans ce qui suit, D représente le dividende, d représente le diviseur, q représente le quotient et r est le reste.

Soit la formule suivante :

d x q + r = D c'est l'égalité qui permet de faire la vérification. (eq 1)

Il faut que r<d ce qui signifie que le reste doit être inférieur au quotient.

Si on vérifie par la formule (eq 1) ci-dessus :

Eq 1<=>16 x 12 + 3 = 72 +3 = 75.

Application dans un autre exemple :

148	12
-12	
028	12
- 24	
0 4	

Vérification : 12x12 +4 = (12x12)+4 = 144 +4) 148 (tel que 4<12).

I) **<u>Critères :</u>**

(1) Diviseur d'un nombre entier :

En mathématique analytique, on appelle nombre premier tout nombre divisible par lui-même.

Si on prend de nombre a et b appartenant à deux nombres entiers, b étant non nul (ce qui équivaut en formaliste mathématique : $a \text{ et } b \,\epsilon\mathbb{N}^2 \text{ avec } b = \emptyset$).

Par exemple,

111	3
-9	37
21	
-21	
0	

(2) Critères :

- Divisibilité par 2 :

Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair ; c'est à dite égal à 0, 2, 4, 6, ou 8.

Par exemple, 57436 est divisible par 2 car son chiffre des unités est pair. On peut vérifier que 1246 :2= 623.

- Divisibilité par 3 :

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est dans la table de 3.

Par exemple, 431 511 est divisible par 3 car 4 + 3+ 1 +5 +1 +1 =15, et 15 est bien dans la table de 3. On peut vérifier que 431 511 :3 143 837 est bien un entier.

- Divisibilité par 4 :

Pour savoir si un nombre entier est divisible par 4, il suffit de vérifier que le nombre formé par ses deux derniers chiffres (unités et dizaines) est divisible par 4.

Par exemple, 1928 est divisible par 4 car 28 est divisible par 4. On peut vérifier que 1928 :4= 482 est bien un entier.

- Divisibilité par 5 :

Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est égal à 0 ou 5.

Par exemple, 12 345 et 6 420 sont divisible par 5.

- Divisibilité par 9 :

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est dans la table de 9.

Par exemple, 711 405 est divisible par 9 car 7+1+1+4+0 +5 = 18, et 18 est bien dans la table de 9. On vérifie que 711 405 :9 = 79 045 est bien un entier.

- Divisibilité par 10 :

Un nombre entier est divisible par 10, si un chiffre des unités est égal à 10.

Maintenant, on va s'intéresser à la division décimale.

II) <u>Division décimale</u>

76,41	3

(1) Dans le chiffre des dizaines 7 du dividende combien de fois 3 ?
(2) Je trouve qu'il y est 2 fois, j'écris le chiffre 2 au quotient. Il reste 1 dizaine.

76,41	3
-6	2
1	

(3) A côté du reste 1, j'abaisse le 6, ce qui donne 16 unités. Et je continue la division ….

76,41	3
-6	2
1 6	

(4) Dans 16 unités combien de fois 3 ? Je trouve qu'il y est 5 fois. J'écris le chiffre 5 au quotient, je le multiplie par 3 et je retranche le résultat à 15. Il reste 1 unité. A côté du reste 1, j'abaisse le chiffre des dixièmes 4, ce qui donne 14. Et je continue ma division…

76,41	3
-6	25
1 6	
-15	
014	

(5) Dans 14 dixièmes combien de fois 3 ? Je trouve qu'il y est 4 fois. J'écris le chiffre des dixièmes 4 au quotient, après avoir mis la virgule ensuite je le multiplie par 3 et je retranche le résultat à 14. Il reste 2 dixièmes.

A côté du reste est 2, j'abaisse le chiffre des centièmes 1, ce qui donne 21. Et je continue ma division...

```
 76,41 | 3
       |------
 -6    | 25,4
 ---   |
  1 6  |
 -15   |
 ---
  014
 -012
  ---
    21
```

(6) Dans 21 centièmes combien de fois 3 ? Je trouve qu'il est 7 fois. J'écris le chiffre des centièmes 7 au quotient, je le multiplie par 3 et je retranche le résultat à 21. Le reste est égal à 0.

```
 76,41 | 3
       |------
 -6    | 25,47
 ---   |
  1 6  |
 -15   |
 ---
  014
 -012
  ---
    21
   -21
   ---
    0
```

Cette division est entière parce qu'elle a un reste nul.

III) **Exercice :**

342	24

Résolution :

342,00	24
-24	
102	14,25
- 96	
60	
- 48	
120	
-120	
0	

1 :8 =

Résolution :

1,000	8
- 8	0,125
20	
- 16	
40	
- 40	
0	

2,55 : 3 ce qui nous donne 3x0,85+0 = 2,55

1,79 :2 ce qui nous donne 2 x 0,895 +0 = 1,79

Prenons par exemple cette division approchée :

10 : 3 qui a pour résultat $3{,}3\overline{3}$ *3+1 =10.